

# 大区域空间直角坐标转换的多项式拟合法研究

倪 飞,房世龙,周春煦

(南通航运职业技术学院 交通工程系,江苏 南通 226010)

摘 要:对于大区域空间直角坐标之间的相互转换,文章提出采用多项式拟合的方法进行转换,并以 80 坐标转换到 2000 坐标为例,说明对于大区域空间直角坐标数据间的转换,采用二次、三次多项式拟合的方法是有效的,为大区域坐标转换提供了新的转换思路。

关键词:多项式拟合;坐标转换;转换参数

中图分类号:O182.1

文献标识码:A

文章编号:1671-9891(2016)02-0071-06

## 0 引言

随着 2000 国家大地坐标系的推行,现有的西安 80 及北京 54 坐标系下的大量资料需要转换到 2000 坐标系中来,以实现新旧地图资料定位的统一。<sup>[1]</sup>对于大区域空间直角坐标之间的相互转换,本文提出采用多项式拟合的方法进行坐标之间的转换。<sup>[2]</sup>这里将以 80 坐标转换到 2000 坐标为例,通过与布尔莎七参数转换法对比分析,选取有效的拟合方法,为大区域空间坐标转换提供新的思路。

## 1 坐标转换多项式拟合法

### 1.1 二次多项式坐标拟合原理

为实现空间直角坐标间的转换,本文采用式(1)的二次多项式拟合新坐标:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X_1 + a_1 + a_2 X_1 + a_3 Y_1 + a_4 Z_1 + a_5 X_1 Y_1 + a_6 X_1 Z_1 + a_7 Z_1 Y_1 \\ Y_2 &= Y_1 + b_1 + b_2 X_1 + b_3 Y_1 + b_4 Z_1 + b_5 X_1 Y_1 + b_6 X_1 Z_1 + b_7 Z_1 Y_1 \\ Z_2 &= Z_1 + c_1 + c_2 X_1 + c_3 Y_1 + c_4 Z_1 + c_5 X_1 Y_1 + c_6 X_1 Z_1 + c_7 Z_1 Y_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $(X_2, Y_2, Z_2)$ 、 $(X_1, Y_1, Z_1)$  分别为新旧坐标系统下的空间直角坐标值,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$  为相应的未知转换参数。

在转换过程中,每个公共点可以建立 3 个转换方程,而多项式拟合下的空间直角坐标转换中未知参数有 21 个。因此,如果有  $m(m \geq 7)$  个公共点,即可建立  $3m$  个方程,完成不同坐标系之间的相互转换。

转换过程中,可先利用重合点空间直角坐标,采用最小二乘准则计算出以上方程中的转换参数,再将待转换旧坐标值代入公式(1)便可求得控制区域内其它各点在新坐标系当中的新坐标值。在上述的转换当中,采用经纬度坐标进行多项式拟合转换同样可行。

### 1.2 三次多项式坐标拟合原理

三次多项式拟合坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X_1 + a_1 + a_2 X_1 + a_3 Y_1 + a_4 Z_1 + a_5 X_1 Y_1 + a_6 X_1 Z_1 + a_7 Z_1 Y_1 + a_8 X_1 Z_1 Y_1 \\ Y_2 &= Y_1 + b_1 + b_2 X_1 + b_3 Y_1 + b_4 Z_1 + b_5 X_1 Y_1 + b_6 X_1 Z_1 + b_7 Z_1 Y_1 + b_8 X_1 Z_1 Y_1 \\ Z_2 &= Z_1 + c_1 + c_2 X_1 + c_3 Y_1 + c_4 Z_1 + c_5 X_1 Y_1 + c_6 X_1 Z_1 + c_7 Z_1 Y_1 + c_8 X_1 Z_1 Y_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期:2016-01-12

基金项目:2014 年江苏省交通科技计划项目“涉水建筑物附近局部冲刷地形智能测绘技术研究”(项目编号:2014C03-07),2014 年度南通市社会事业科技创新与示范计划项目“桥梁墩台周围局部冲刷自动实时超声监测技术研究”(项目编号:HS2014017)。

作者简介:倪飞(1983—),男,江苏连云港人,南通航运职业技术学院交通工程系讲师,硕士。

式中  $(X_2, Y_2, Z_2)$ 、 $(X_1, Y_1, Z_1)$  分别为新、旧坐标系中的空间直角坐标值  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$  为相应的未知转换参数。

在转换过程中,每个重合点可以列出 3 个方程,因为该方程式有 24 个未知参数,可先利用  $n(n \geq 8)$  组重合点空间直角坐标  $(X_2^i, Y_2^i, Z_2^i)$   $(X_1^i, Y_1^i, Z_1^i)$  采用最小二乘准则计算出以上方程中的转换参数,然后便可利用求得的转换参数计算出控制区域内其它各点在新坐标系当中的新坐标值。坐标转换多项式拟合法程序编写流程如图 1 所示:

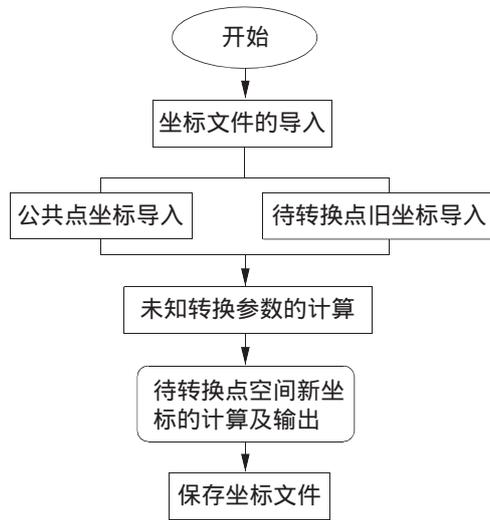


图 1 多项式拟合法程序编写流程图

1.3 算例验证

从已知控制网(面积约 18.7 万平方公里)中选择 15 个控制点,其三维空间直角坐标如表 1 所示。以下分别采用二次及三次多项式拟合法进行空间直角坐标的转换。

(1)二次多项式拟合法。从表 1 中均匀的取  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$  七个点作为重合点求取转换参数,同时选择剩下控制点中的 8 个点用于精度的检核,如表 2 所示。

表 1 已知重合点三维坐标值

点号	西安 80 坐标系坐标			国家 2000 坐标系坐标		
	X/m	Y/m	Z/m	X/m	Y/m	Z/m
$C_1$	-2 264 625.882	4 643 171.131	3 728 193.416	-2 264 624.810	4 643 168.939	3 728 191.676
$C_2$	-2 583 000.603	4 473 888.285	3 728 193.416	-2 582 999.384	4 473 886.184	3 728 191.674
$C_3$	-2 206 072.853	4 523 119.648	3 905 445.791	-2 206 071.810	4 523 117.511	3 905 443.968
$C_4$	-2 362 583.575	4 443 373.454	3 905 445.788	-2 362 582.458	4 443 371.355	3 905 443.969
$C_5$	-2 516 215.853	4 358 213.687	3 905 445.783	-2 516 214.664	4 358 211.633	3 905 443.966
$C_6$	-2 144 822.853	4 397 538.534	4 077 987.478	-2 144 821.842	4 397 536.458	4 077 985.570
$C_7$	-2 446 354.949	4 237 211.070	4 077 987.480	-2 446 353.803	4 237 209.076	4 077 985.572
$J_1$	-2 345 315.473	4 602 940.779	3 728 193.415	-2 345 314.361	4 602 938.608	3 728 191.677
$J_2$	-2 425 290.660	4 561 308.333	3 728 193.416	-2 425 289.518	4 561 306.191	3 728 191.678
$J_3$	-2 504 527.085	4 518 286.467	3 728 193.411	-2 504 525.905	4 518 284.337	3 728 191.676
$J_4$	-2 235 690.089	4 583 845.613	3 817 394.940	-2 235 689.828	4 583 843.440	3 817 393.161
$J_5$	-2 315 349.517	4 544 129.283	3 817 394.944	-2 315 348.423	4 544 127.145	3 817 393.156
$J_6$	-2 394 302.868	4 503 028.766	3 817 394.937	-2 394 301.741	4 503 026.658	3 817 393.159
$J_7$	-2 472 526.894	4 460 556.590	3 817 394.940	-2 472 525.724	4 460 554.490	3 817 393.163
$J_8$	-2 549 997.764	4 416 725.679	3 817 394.940	-2 549 996.558	4 416 723.595	3 817 393.161

表 2 二次多项式拟合法坐标转换内、外符合精度

点号	外符合精度(重合点转换误差)			点号	内符合精度(检核点转换误差)		
	$V_x$ /mm	$V_y$ /mm	$V_z$ /mm		$V_x'$ /mm	$V_y'$ /mm	$V_z'$ /mm
$J_1$	3.0	1.0	2.0	$C_1$	0.0	0.0	0.0
$J_2$	4.0	6.0	2.0	$C_2$	0.0	0.0	0.0
$J_3$	4.0	3.0	4.0	$C_3$	0.0	0.0	0.0
$J_4$	4.0	6.0	1.0	$C_4$	0.0	0.0	0.0
$J_5$	4.0	7.0	6.0	$C_5$	0.0	0.0	0.0
$J_6$	0.0	6.0	0.0	$C_6$	0.0	0.0	0.0
$J_7$	6.0	3.0	1.0	$C_7$	0.0	0.0	0.0
$J_8$	4.0	4.0	1.0				

根据表 2 可以计算出：

$$X \text{ 方向坐标转换的平均误差: } \bar{V}_x = \sum_{i=1}^{15} V_x^i / 15 = 2 \text{ mm};$$

$$Y \text{ 方向坐标转换的平均误差: } \bar{V}_y = \sum_{i=1}^{15} V_y^i / 15 = 2.4 \text{ mm};$$

$$Z \text{ 方向坐标转换的平均误差: } \bar{V}_z = \sum_{i=1}^{15} V_z^i / 15 = 1.1 \text{ mm};$$

$$\text{那么 转换点位中误差: } M = \pm \sqrt{(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) / 15} = \pm 5.0 \text{ mm}。$$

(2)三次多项式拟合法。从表 1 中均匀的选取  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$  及  $J_8$  点作为重合点求取未知转换参数,同时选择剩下的 7 个点用于精度检核,如表 3 所示。

通过 Matlab 语言编程计算,得出的坐标转换参数如下：

$$a_0 = -688.383 \quad a_1 = -1.289 \times 10^{-4} \quad a_2 = 1.032 \times 10^{-4} \quad a_3 = 1.049 \times 10^{-4} \quad a_4 = 1.776 \times 10^{-11} \quad a_5 = 1.839 \times 10^{-11},$$

$$a_6 = -1.273 \times 10^{-11} \quad a_7 = -2.286 \times 10^{-11};$$

$$b_0 = -2.267 \times 10^{-3} \quad b_1 = -4.017 \times 10^{-4} \quad b_2 = 3.339 \times 10^{-4} \quad b_3 = 3.397 \times 10^{-4} \quad b_4 = 5.253 \times 10^{-11} \quad b_5 = 5.44 \times 10^{-11},$$

$$b_6 = -3.946 \times 10^{-11} \quad b_7 = -5.943 \times 10^{-18};$$

$$c_0 = 6.579 \times 10^2 \quad c_1 = 1.296 \times 10^{-4} \quad c_2 = -1.013 \times 10^{-4} \quad c_3 = -1.047 \times 10^{-4} \quad c_4 = -1.914 \times 10^{-11} \quad c_5 = -2.026 \times 10^{-11},$$

$$c_6 = 1.365 \times 10^{-11} \quad c_7 = 2.898 \times 10^{-18}。$$

表 3 三次多项式拟合法坐标转换内、外符合精度

点号	外符合精度(重合点转换误差)			点号	内符合精度(检核点转换误差)		
	$V_x$ /mm	$V_y$ /mm	$V_z$ /mm		$V_x'$ /mm	$V_y'$ /mm	$V_z'$ /mm
$J_1$	3.0	1.0	2.0	$C_1$	1.0	0.0	0.0
$J_2$	2.0	4.0	2.0	$C_2$	0.0	1.0	0.0
$J_3$	4.0	1.0	4.0	$C_3$	0.0	0.0	0.0
$J_4$	3.0	5.0	1.0	$C_4$	2.0	0.0	0.0
$J_5$	4.0	4.0	3.0	$C_5$	0.0	0.0	0.0
$J_6$	0.0	6.0	0.0	$C_6$	0.0	1.0	0.0
$J_7$	3.0	3.0	1.0	$C_7$	0.0	0.0	0.0
				$J_8$	4.0	4.0	1.0

根据表 3 可以计算出：

$$X \text{ 坐标转换的平均误差: } \bar{V}_x = \sum_{i=1}^{15} V_x^i / 15 = 2.0 \text{ mm};$$

Y 坐标转换的平均误差  $\bar{V}_y = \sum_{i=1}^{15} V_y^i / 15 = 2.0 \text{ mm}$  ;

Z 坐标转换的平均误差  $\bar{V}_z = \sum_{i=1}^{15} V_z^i / 15 = 0.9 \text{ mm}$  ;

那么 转换点位中误差  $M = \pm \sqrt{(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) / 15} = \pm 4.0 \text{ mm}$ 。

(3)布尔莎七参数模型转换法。布尔莎(Bursa)七参数的变换公式为：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 0 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} + (1 + K) \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $(X_T, Y_T, Z_T)$  为新坐标系下的坐标值  $(X_G, Y_G, Z_G)$  为原坐标系下坐标  $(d_x, d_y, d_z)^T$  为坐标转换时的 3 个坐标平移参数  $K$  为缩放比例尺度参数  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  为旋转参数。<sup>[3]</sup>布尔莎模型在求解转换参数时,至少需要 3 个已知的公共点参与。每个点可以列出 3 个误差方程式为：

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_G & 0 & -Z_G & Y_G \\ 0 & 1 & 0 & Y_G & Z_G & 0 & -X_G \\ 0 & 0 & 1 & Z_G & -Y_G & X_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ K \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_G - X_T \\ Y_G - Y_T \\ Z_G - Z_T \end{bmatrix} \quad (4)$$

利用最小二乘原理即可求解出 7 个转换参数,再利用转换参数计算其它点在新坐标系下的空间直角坐标。选择表 1 中的  $C_1, C_2, C_6$  及  $C_7$  为公共点,剩下为检核点,转换结果如表 4 所示。

表 4 布尔莎七参数法坐标转换内、外符合精度

点号	$V_x/\text{mm}$	$V_y/\text{mm}$	$V_z/\text{mm}$	点号	$V_x/\text{mm}$	$V_y/\text{mm}$	$V_z/\text{mm}$
$J_1$	3.0	1.0	2.0	$C_1$	1.0	0.0	0.0
$J_2$	2.0	4.0	2.0	$C_2$	0.0	1.0	0.0
$J_3$	2.0	1.0	4.0	$C_3$	0.0	0.0	1.0
$J_4$	3.0	3.0	1.0	$C_4$	1.0	0.0	0.0
$J_5$	3.0	4.0	3.0	$C_5$	0.0	0.0	0.0
$J_6$	0.0	4.0	0.0	$C_6$	0.0	1.0	0.0
$J_7$	3.0	3.0	1.0	$C_7$	0.0	0.0	0.0
$J_8$	3.0	2.0	1.0				

根据表 4 可以计算出：

X 坐标转换的平均误差  $\bar{V}_x = \sum_{i=1}^{15} V_x^i / 15 = 1.2 \text{ mm}$  ;

Y 坐标转换的平均误差  $\bar{V}_y = \sum_{i=1}^{15} V_y^i / 15 = 1.6 \text{ mm}$  ;

Z 坐标转换的平均误差  $\bar{V}_z = \sum_{i=1}^{15} V_z^i / 15 = 1.0 \text{ mm}$  ;

那么 转换点位中误差  $M = \pm \sqrt{(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) / 15} = \pm 3.3 \text{ mm}$ 。

由表 2、表 3 和表 4,可以得到如下结论：

- 第一,在大区域空间直角坐标转换当中,二次及三次多项式拟合转换法能够满足坐标转换的精度要求；
- 第二,二次及三次多项式拟合法与布尔莎七参数法转换精度相当；

第三 相比而言,三次多项式拟合法较二次多项式精度要高。

2 坐标转换多项式拟合法适用性研究

前面通过具体的换算例验证了多项式拟合法(二次及三次多项式)在三维空间直角坐标转换当中的可行性。针对该算法在坐标转换过程当中的适用面积大小的情况,本文将通过模拟的空间坐标数据,分别运用二次及三次多项式拟合法进行转换,从中归纳得出多项式拟合算法的适用区域。

2.1 空间坐标数据模拟

由于当前研究所具备的空间坐标大都来自于小范围的控制网,为了获得大区域的三维空间坐标数据,以中国中东部(大致北纬 20°-40°,东经 100°-120°度范围)地区为研究对象,其面积约为 400 多万平方公里,模拟出该区域的三维空间直角坐标与其相对应的大地坐标。具体模拟的步骤与方法如下:

(1)根据一定的经纬度间隔(本例为 10'间隔)划分出规则的经纬度格网,总计 14 641 个格网节点,亦即 14 641 个同时具有西安 80 与国家 2000 坐标系下的空间直角坐标与大地坐标数据;

(2)根据起始经度、纬度及划分的格网间隔,将各格网节点的大地坐标值分别赋值给特定的矩阵(其中,本例假定为在椭球面上进行投影,令其大地高值 H 皆为 0);

(3)根据西安 80 椭球参数与国家 2000 大地坐标的椭球投影参数,利用式(5),分别计算出各格网节点在两套坐标系下的三维空间直角坐标值 $(X_{80}^i, Y_{80}^i, Z_{80}^i)$ 与 $(X_{2000}^i, Y_{2000}^i, Z_{2000}^i)$ 。<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} X = (N + H)\cos B \cos L \\ Y = (N + H)\cos B \sin L \\ Z = [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{cases} \quad (5)$$

式中  $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$  为卯酉圈曲率半径  $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$  为椭球第一偏心率的平方。

(4)为了使得模拟出的空间坐标数据更加贴近实际情况,在计算出的两套空间直角坐标值中,依据一定的随机性加入随机误差值。本例中西安 80 及国家 2000 空间直角坐标值加入的随机误差皆服从正态分布,其添加的依据分别为:

方差  $\sigma_{x80}^2 = 0.003 6$   $\sigma_{y80}^2 = 0.002 5$   $\sigma_{z80}^2 = 0.003 6$  均值  $\delta_{(x,y,z)80} = 0$ ;

方差  $\sigma_{x2000}^2 = 0.002 5$   $\sigma_{y2000}^2 = 0.004 9$   $\sigma_{z2000}^2 = 0.002 5$  均值  $\delta_{(x,y,z)2000} = 0$ 。

(5)将加入随机误差值后的两套三维空间直角坐标值,采用迭代算法分别计算出其在各自椭球下相应的大地坐标值 $(B_{80}^i, L_{80}^i, H_{80}^i)$ 及 $(B_{2000}^i, L_{2000}^i, H_{2000}^i)$ ;

(6)空间直角坐标值与大地坐标值的输出。

2.2 二次多项式拟合法适用区域

为总结出二次多项式拟合法在坐标转换过程中的适用面积,本例通过模拟出的三维空间直角坐标数据进行编程计算,归纳出二次多项式法的转换规律,如图 2 所示:

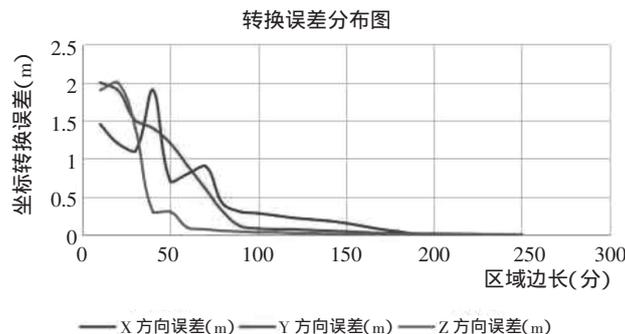


图 2 二次多项式拟合转换法不同面积转换误差分布

从中可以看出三维空间直角坐标转换中,二次多项式拟合法在区域面积达到 15.68 万平方公里时, X, Y, Z 三个方向坐标转换的误差分别可以达到 5 mm、4 mm 及 4 mm,即面积大于 15.68 万平方公里情况下,二

次多项式拟合法能够达到坐标转换的精度。

### 2.3 三次多项式拟合法适用区域

同样,为了总结出三次多项式拟合法在空间直角坐标转换中的适用面积,本例采用模拟三维空间直角坐标数据进行编程计算,归纳出其转换规律,如图3所示:

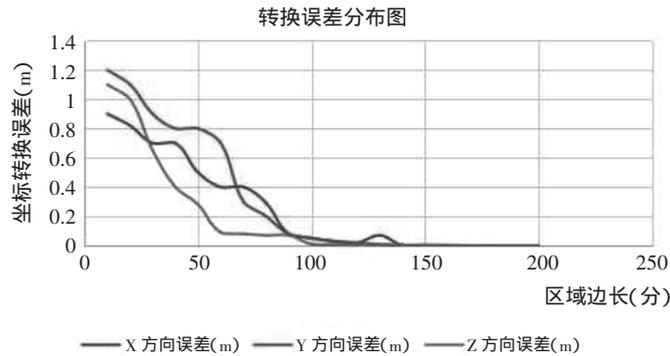


图3 三次多项式拟合转换法不同面积转换误差分布

从中可以看出三维空间直角坐标转换中,三次多项式拟合法在区域面积达到 6.350 4 万平方公里时, X, Y, Z 三个方向坐标转换的误差分别可以达到 3 mm、2 mm 及 4 mm,即面积大于 6.350 4 万平方公里情况下,三次多项式拟合法能够达到坐标转换的精度。

### 3 结束语

上述算例研究表明,多项式拟合算法能够用于大区域不同空间直角坐标之间的转换。不同坐标系下的空间直角坐标转换,当区域面积达到 15.68 万平方公里时,采用二次多项式拟合法能够达到坐标转换的精度,而三次多项式拟合法则能够适用于区域面积达到 6.350 4 万平方公里以上的空间直角坐标转换。

### 参考文献:

- [1] 廖永生,陈瑞波,王龙波.从地方坐标系到 2000 国家大地坐标系的转换方法[J].海洋测绘,2010(5):6-8.
- [2] 宁津生,刘经南,陈俊勇,等.现代大地测量理论与技术[M].武汉:武汉大学出版社,2006.
- [3] 倪飞,崔桂官.空间直角坐标系系统转换的抗差算法方法[J].海洋测绘,2011(6):28-30.
- [4] 潘正风,杨正尧,程效军,等.数字测图原理与方法[M].武汉:武汉大学出版社,2004.

## Study on Polynomial Interpolation for Space Coordinate Conversion of Large Regions

NI Fei, FANG Shi-long, ZHOU Chun-qi

(Dept. of Traffic Engineering, Nantong Vocational & Technical Shipping College, Nantong 226010, China)

**Abstract:** In view of the space coordinate conversion of large regions, this article proposes adopting polynomial interpolation. In addition, taking the conversion from coordination 80 to 2000 as an example, this article comes to the conclusion that the adoption of quadratic polynomial and cubic polynomial interpolation has produced certain effects, which offers a new line of thought for this field.

**Key words:** Polynomial interpolation; Coordinate conversion; Conversion parameter